**CHUYÊN ĐỀ: ĐỒ THỊ HÀM SỐ**

**HỆ THỐNG BÀI TẬP SỬ DỤNG TRONG CHUYÊN ĐỀ**

|  |  |
| --- | --- |
| **Tỉnh, huyện, thành phố** | **Năm học** |
| *Học sinh giỏi huyện Chư Sê* | 2019 - 2020 |
| *Học sinh giỏi huyện Cảm Thủy (Thanh Hóa)* | 2019 - 2020 |
| *Học sinh giỏi Tỉnh Bắc Ninh* | 2018 - 2019 |
| *Học sinh giỏi Tỉnh Đà Nẵng* | 2018 – 2019, 2015 - 2016 |
| *Học sinh giỏi Bà Rịa Vũng Tàu* | 2018 - 2019 |
| *Học sinh giỏi Tỉnh Thái Bình* | 2018 - 2019 |
| *Học sinh giỏi Tỉnh Hưng Yên* | 2016 - 2017 |
| *Học sinh giỏi Tỉnh Đắc Lắc* | 2015 - 2016 |
| *Học sinh giỏi Quận Ba Đình* | 2020-2021 |
| *Học sinh giỏi Vĩnh Lộc* | 2019-2020 |
| *Học sinh giỏi TP Hưng Yên* | 2020-2021 |
| *Học sinh giỏi Tỉnh Vĩnh Phúc* | 2020-2021 |
| *Học sinh giỏi Tỉnh Thái Nguyên* | 2020-2021 |
| *Học sinh giỏi TP Đà Nẵng* | 2020-2021 |
| *Học sinh giỏi Tỉnh Quảng Bình* | 2020-2021 |
| *Chuyên Thái Bình vòng 1* | 2019 - 2020 |
| *Chuyên Cần Thơ* | 2019 - 2020 |
| *Chuyên Đắc Lắc* | 2019 - 2020 |
| *Chuyên Toán Quảng Ngãi* | 2019 - 2020 |
| *Chuyên Quảng Ninh* | 2019 - 2020 |
| *Chuyên Hưng Yên* | 2019 - 2020 |
| *Chuyên Cần Thơ* | 2019 - 2020 |
| *Chuyên Quảng Ngãi* | 2019 - 2020 |
| *Chuyên Hưng Yên* | 2019 - 2020 |
| *Chuyên Lâm Đồng* | 2018 - 2019 |
| *Tuyển sinh vào 10 chuyên Thái Bình* | 2018 - 2019 |
| *Tuyển sinh vào 10 chuyên lâm Đồng* | 2018 - 2019 |

**Bài 1: Đồ thị hàm số bậc nhất**

**A. Kiến thức cần nhớ**

1. Hàm số

+) Với một đại lượng  phụ thuộc vào một đại lượng  thay đổi sao cho với mỗi giá trị  thì có 1 và chỉ 1 giá trị . Ta nói  là một hàm số của 

Kí hiệu: 

+) Muốn tính giá trị của hàm số  tại , ta thay biến số  bởi  và tính 

+) Đồ thị hàm số của hàm số  là tập hợp các điểm  trên hệ trục tọa độ  thỏa mãn 

+) Hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến trên tập 

Nếu  thì  đồng biến

Nếu  thì  nghịch biến

2. Hàm số bậc nhất

+) Dạng hàm số: 

Cách viết khác: 

+) Nếu  thì  là hàm số đồng biến

+) Nếu  thì  là hàm số nghịch biến

+) Đồ thị hàm số

- Là tập hợp các điểm  thỏa mãn 

- Là một đường thẳng

- Song song với đồ thị hàm số 

- Đi qua điểm  và 

+) Vẽ đồ thị hàm số 

**Bài 1:**

Cho hàm số  ( là biến số)

a) Chứng minh rằng hàm số trên là một hàm số bậc nhất

b) Hàm số là hàm số đồng biến hay nghịch biến

c) Tìm  để đồ thị hàm số trên đi qua điểm 

**Lời giải**

a) Ta có với mọi  thì  hàm số đã cho là hàm số bậc nhất

b) Nhận thấy  nên hàm số đã cho đồng biến trên .

c) Để đồ thị hàm số đi qua điểm  thì: 

**Bài 2:**

Cho hàm số 

a) Tìm  để hàm số là hàm số bậc nhất

b) Tìm  để hàm số đồng biến, nghịch biến trên tập xác định.

**Lời giải**

a) Hàm số là hàm số bậc nhất 

b) Hàm số đồng biến trên 

Lập bảng xét dấu ta được 

Tương tự: Hàm số đồng biến .

**Bài 3:**

Cho hàm số 

a) Chứng minh rằng với mọi  đồ thị hàm số luôn cắt trục hoành tại một điểm cố định. Xác định tọa độ điểm đó.

b) Với giá trị nào của  đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2. Vẽ đồ thị hàm số trong trường hợp này.

**Lời giải**

a) Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là nghiệm của phương trình



Gọi  là điểm thuộc trục hoành mà đồ thị hàm số luôn đi qua, khi đó ta có:



Vậy 

b) Tọa độ của giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung có dạng 

Thay hoành độ của giao điểm vào phương trình hàm số ta có: 

Vậy  thỏa mãn điều kiện bài toán.

**Bài 4:**

Cho hàm số 

a) Định  để đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ 

b) Gọi  lần lượt là giao điểm của đồ thị hàm số với trục . Xác định  để diện tích tam giác  bằng 4 (đvdt).

**Lời giải**

a) Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ khi và chỉ khi: 

Vậy  thỏa mãn điều kiện bài toán.

b) Theo bài ra ta có tọa độ của hai điểm  lần lượt là 

Diện tích tam giác : 

.

**Bài 5:**

a) Với giá trị nào của  thì hàm số  là một hàm số bậc nhất?

b) Chứng minh rằng hàm số  luôn là hàm số bậc nhất. Hàm số này đồng biến hay nghịch biến trên 

c) Với giá trị nào của  thì hàm số  là hàm số bậc nhất?

d) Cho hàm số . Tìm  để hàm số đồng biến trên  và nghịch biến trên .

**Lời giải**

a) Hàm số đã cho là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi 

b) 

Vậy hàm số luôn là hàm số bậc nhất và  nên hàm số nghịch biến trên 

c) Hàm số là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi 

d) Ta có 

Để hàm số đồng biến trên  thì 

Để hàm số nghịch biến trên  thì 

**Bài 6:**

Cho hàm số 

a) Chứng minh rằng với mọi  đồ thị hàm số luôn cắt trục hoành tại điểm cố định. Xác định tọa độ điểm đó

b) Với giá trị nào của  đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2. Vẽ đồ thị hàm số trong trường hợp này.

**Lời giải**

a) Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là nghiệm của phương trình 

Gọi  là điểm thuộc trục hoành mà đồ thị hàm số luôn đi qua, khi đó ta có . Vậy 

b) Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung có dạng 

Thay hoành độ của giao điểm vào phương trình hàm số ta có 

Vậy  thỏa mãn điều kiện đề bài.

**Bài 7:**

Cho hàm số 

a) Định  để đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ 

b) Gọi  lần lượt là giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung . Xác định  để diện tích tam giác  bằng 4 (đvdt).

**Lời giải**

a) Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ  khi và chỉ khi 

Vậy  thỏa mãn bài toán.

b) Theo bài ra ta có tọa độ của hai điểm  lần lượt là ; 

Diện tích tam giác  là:



**Bài 2: Vị trí tương đối của hai đường thẳng**

**A. Kiến thức cần nhớ**

1. Hệ số góc của đường thẳng

Giả sử , khi đó  là góc tạo bởi đường thẳng  và tia 

Ta có: 

: Hệ số góc của đường thẳng 

\*) Tương tự: Giả sử , khi đó 

  thì  được gọi là hệ số góc.

2. Vị trí tương đối của hai đường thẳng  và 

+)  trùng 

+)  song song 

+)  vuông góc 

+)  cắt  tại 

Lúc đó  là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm 

**Bài 1:**

Tìm giá trị của  để hai đường thẳng  và 

a) Song song

b) Cắt nhau

c) Vuông góc với nhau

**Lời giải**

a) Điều kiện . Vậy 

b) Điều kiện 

c) Điều kiện 

**Bài 2:**

Xác định các hệ số  và  để đường thẳng  cắt trục tung tại điểm cí tung độ bằng -2 và song song với đường thẳng , trong đó  là gốc tọa độ. 

**Lời giải**

Đường thẳng 

Đường thẳng đã cho song với với  vậy 

Mặt khác đường thẳng đã cho cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2, suy ra 

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình 

**Bài 3:**

a) Xác định hàm số bậc nhất, biết đồ thị của nó là đường thẳng đi qua  và tạo với trục hoành một góc 

b) Tìm đường thẳng  vuông góc với đường thẳng  và đi qua gốc tọa độ.

**Lời giải**

a) Hệ số góc của đường thẳng cần tìm bằng 

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là 

b) Hệ số góc của đường thẳng  cần tìm là 

Phương trình đường thẳng  cần tìm có dạng . Vì  đi qua gốc tọa độ nên . Vậy .

**Bài 4:**

Xác định hàm số , biết rằng:

a) Song song với đường thẳng  và đi qua điểm 

b) Vuông góc với đường thẳng  và đi qua điểm 

**Lời giải**

a) Để đường thẳng  song song với 

Đường thẳng  đi qua điểm .

b) Để đường thẳng  vuông góc với đường thẳng 



**Bài 5:**

Cho hàm số  có đồ thị đi qua điểm . Hãy xác định hệ số góc và tính góc tạo bởi đường thẳng và tia 

**Lời giải**

Gọi  là góc tạo bởi đường thẳng  và tia 

 đi qua 

 hệ số góc 



**Bài 6:**

Cho hai đường thẳng  và 

a) Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng.

b) Khi  thay đổi, tìm tập hợp giao điểm của hai đường thẳng trên.

**Lời giải**

a) Tìm được 

b) Nhận thấy 

Vậy tập hợp giao điểm của  và  là đường thẳng 

**Bài 7:**

Xác định các hệ số  và  để đường thẳng  cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2 và song song với đường thẳng , trong đó  là gốc tọa độ, 

**Lời giải**

Đường thẳng 

Đường thẳng đã cho song song với  vậy 

Mặt khác đường thẳng đã cho cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2, suy ra .

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình .

**Bài 8:**

a) Xác định hàm số bậc nhất, biết đồ thị của nó là đường thẳng đi qua điểm  và tạo với trục hoành một góc 

b) Tìm đường thẳng  vuông góc với đường thẳng  và đi qua gốc tọa độ.

**Lời giải**

a) Hệ số góc của đường thẳng cần tìm bằng 

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là 

b) Hệ số góc của đường thẳng  cần tìm là 

Phương trình đường thẳng  cần tìm có dạng 

Vì  đi qua gốc tọa độ nên .

Vậy .

**Bài 9:** Chuyên Hưng Yên, năm học 2019 - 2020

Cho hai đường thẳng  và 

a) Tìm  để  song song với 

b) Chứng minh đường thẳng  luôn đi qua điểm  với mọi 

c) Tìm tọa độ điểm  thuộc  sao cho  vuông góc với .

**Lời giải**

a)  song song với 

Vậy  là giá trị cần tìm.

b) Thay  vào phương trình  ta được:

(đúng với mọi m)

Vậy đường thẳng  luôn đi qua điểm  với mọi 

c) Cách 1: Vì điểm  thuộc  nên tọa độ điểm  có dạng 

Điều kiện:  khác  hay 

Giả sử phương trình đường thẳng  là 

Vì  và  nên ta có hệ phương trình 

AB vuông góc với 

. Vậy tọa độ điểm 

Cách 2: Giả sử phương trình đường thẳng  là 

AB vuông góc với 

Vậy phương trình đường thẳng  có dạng 

Vì đường thẳng  đi qua  nên 

 phương trình đường thẳng  là 

 tọa độ điểm  là nghiệm của hệ phương trình 

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ DẠNG TOÁN

**Bài 1:**

Lập phương trình đường thẳng qua  và thỏa mãn

a) Có hệ số góc 

b) Song song với đường thẳng 

c) Vuông góc với đường thẳng 

**Lời giải**

Gọi phương trình đường thẳng cần tìm là 

a) Với 

Vì 

b) 

Ta có 

Với , từ câu a) 

Do  không thỏa mãn.

Vậy không tồn tại đường thẳng .

c) 



Thay tọa độ điểm  vào  ta tìm được .

**Bài 2:**

Biện luận số nghiệm của phương trình 

**Lời giải**

Phương trình 

+ Xét  (song song với )

+ Xét 



Ta có: 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

\*) Số giao điểm của  và đồ thị (C) là số nghiệm của phương trình (\*)

Dựa vào đồ thị ta có:

+  thì  không cắt , suy ra phương trình (\*) vô nghiệm

+ Nếu  cắt  tại 1 điểm, suy ra phương trình (\*) có 1 nghiệm

+ Nếu  phương trình (\*) có hai nghiệm phân biệt.

**Bài 3:**

Cho hai đường thẳng  và . Tìm  để

a) Hai đường thẳng cắt nhau tại điểm A

a) Hai đường thẳng cắt nhau tại điểm A nằm trên trục tung

b) Hai đường thẳng cắt nhau tại điểm A nằm bên trái trục tung

c) Hai đường thẳng cắt nhau tại điểm A nằm ở góc phần tư thứ nhất.

**Lời giải**

a) Hai đường thẳng d và d’ có  với mọi m nên hai đường thẳng đó luôn cắt nhau

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (d’)



Suy ra 

Điểm  nằm trên trục tung thì 

c) Điểm  nằm bên trái trục tung 

d) Điểm  nằm ở góc phần tư thứ nhất 

**Bài 4:**

Xác định các số nguyên  sao cho đường thẳng  đi qua điểm  cắt trục tung tại điểm có tung độ là một số nguyên dương, cất trục hoành tại điểm có hoành độ là một số nguyên dương.

**Lời giải**

Giao điểm với trục hoành là 

Giao điểm với trục tung là 

Theo đề bài thì 

Điểm  thuộc  nên 

Vì 

+  (thỏa mãn)

+  (thỏa mãn)

+  (loại)

+  (loại)

Vậy  và 

**Bài 5:**

Xác định đường thẳng đi qua , cắt trục tung tại điểm có tung độ là một số nguyên dương, cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là một số nguyên tố.

**Lời giải**

Đường thẳng cần lập có dạng 

Điểm  thuộc đường thẳng nên 

Vì  là số nguyên tố nên 

Vì 

Mà  là số nguyên tố nên 

Với 

Với 

Vậy phương trình đường thẳng cần lập là  hoặc 

**Bài 6:**

Cho hàm số 

a) Vẽ đồ thị hàm số 

b) Vẽ đồ thị hàm số 

c) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình 

**Lời giải**

b) Ta có 

c) Từ hình vẽ câu b) ta có:

Với  thì phương trình vô nghiệm.

Với  thì phương trình có duy nhất một

nghiệm.

Với  thì phương trình có hai nghiệm

phân biệt.

**Bài 7:**

Cho hàm số  có đồ thị là 

a) Vẽ đồ thị các hàm số 

b) Xác định  để đồ thị  đi qua điểm . Vẽ đồ thị  của hàm số đã cho

c) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình 

**Lời giải**

b) Ta có:



Thay tọa độ  vào phương trình đồ thị hàm số (1) ta có:



Với  ta có:

 

c) Dựa vào đồ thị trên ta thấy

Nếu  thì phương trình vô nghiệm

Nếu  thì phương trình có duy nhất

một nghiệm

Nếu  thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

**Bài 8:** Chuyên Hưng Yên, năm học 2019 - 2020

Cho hai đường thẳng  và 

a) Tìm  để  song song song với 

b) Chứng minh đường thẳng  luôn đi qua điểm  với mọi 

c) Tìm tọa độ điểm  thuộc  sao cho  vuông góc với 

**Lời giải**

a)  song song song với 

b) Thay  vào phương trình  ta được:

 (luôn đúng với )

Vậy đường thẳng  luôn đi qua điểm  với mọi 

c) Cách 1: Vì  tọa độ điểm  có dạng 

Điều kiện  khác điểm  hay 

Giả sử phương trình đường thẳng  là 

Vì  và  nên ta có hệ phương trình 



Ta có 

hay 

Cách 2: Giải sử phương trình đường thẳng  là 

Ta có  hay 

Vì đường thẳng  đi qua điểm 

Vậy phương trình đường thẳng  là 

Vậy tọa độ  là nghiệm của hệ phương trình 

**Dạng 3: Chứng minh 3 điểm thẳng hàng, ba đường thẳng đồng quy**

**Bài 1:**

Cho ba đường thẳng 

a) Tìm tọa độ giao điểm của 

b) Chứng minh rằng ba đường thẳng đồng quy

c) Tìm  sao cho ba đường thẳng  và  đồng quy.

**Lời giải**

a) Tọa độ giao điểm của  và  là nghiệm của hệ phương trình



Vậy tọa độ giao điểm của  là 

b) Ba đường thẳng  đồng quy 

c)  đã cho đồng quy tại  nên 4 đường thẳng đồng quy tại 

**Bài 2:**

Cho 3 điểm 

a) Viết phương trình đường thẳng 

b) Chứng minh rằng ba điểm  thẳng hàng.

c) Cho . Tìm  để

+  thẳng hàng

+  không thẳng hàng

**Lời giải**

a) Gọi phương trình đường thẳng  là 

Vì  thuộc đường thẳng 

Vì  thuộc đường thẳng 

Vậy phương trình đường thẳng 

b) Ta có  thuộc đường thẳng 

Suy ra 3 điểm  thẳng hàng.

c) Ba điểm  thẳng hàng khi  thuộc đường thẳng 

Ba điểm  không thẳng hàng 

**Bài 3:**

Tìm  để đồ thị của hàm số  cắt đường thẳng  tại điểm có hoành độ bằng -1.

**Lời giải**

Đường thẳng  đi qua điểm 

Mặt khác  thuộc đường thẳng  nên ta có:



**Bài 4:**

Cho ba đường thẳng 

a) Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng  và 

b) Tìm  để đường thẳng  đi qua 

c) Tìm  để ba đường thẳng đã cho đồng quy.

**Lời giải**

a) Tọa độ giao điểm  là nghiệm của hệ 

b) 

c) ba đường thẳng đồng quy khi và chỉ khi giao điểm của 3 đường thẳng cũng thuộc đường thẳng thứ 3

Ta có . Vậy .

**Bài 5:**

Trong mặt phẳng tọa độ , cho ba đường thẳng . Tìm  để  cắt  tại một điểm thuộc 

**Lời giải**

 cắt  tại 

Vì  thuộc  nên 

.

**Bài 6:**

Cho bốn điểm 

a) Chứng minh rằng bốn điểm  thẳng hàng

b) Tìm  sao cho ba điểm  thẳng hàng.

**Lời giải**

a) Đường thẳng đi qua  và  là 

phương trình  có dạng 

Vì  thuộc đường thẳng  nên ta có hệ phương trình



Suy ra phương trình 

Với điểm , thay  vào phương trình  ta có  (đúng)

Với điểm , thay  vào phương trình  ta có  (đúng)

Vậy các điểm  và  đều thuộc đường thẳng . Tức là bốn điểm  thẳng hàng

b) Phương trình đường thẳng  có dạng 

Vì  thuộc đường thẳng  nên ta có hệ phương trình



Suy ra phương trình : 

Điểm  thuộc đường thẳng  nên ta có 

Vậy .

**Bài 7:**

Với giá trị nào của  thì ba đường thẳng sau đồng quy ,  và .

**Lời giải**

Gọi  là giao điểm của  và  thỏa mãn:



Để ba đường thẳng đồng quy thì  (thỏa mãn điều kiện ).

**Bài 8:** HSG Quận Ba Đình, năm học 2020 - 2021

Trên mặt phẳng tọa độ cho các đường thẳng . Tìm giá trị của  sao cho các đường thẳng  cắt nhau tại một điểm. Biết rằng 

**Lời giải**

Giao điểm của  và  có tọa độ là 

Từ đó thay  vào phương trình  ta được:



.

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ DẠNG TOÁN

**Bài 1:**

Chứng minh rằng đồ thị hàm số  luôn đi qua ba điểm cố định. Chứng minh ba điểm cố định đó thẳng hàng.

**Lời giải**

Gọi  là điểm cố định mà đồ thị đi qua

Khi đó 



Giải (1): 

Vậy đồ thị đã cho đi qua ba điểm cố định 

Viết phương trình đường thẳng  đi qua hai điểm 

Phương trình đường thẳng  có dạng 

Vì  thuộc đường thẳng 

Vậy phương trình đường thẳng 

Với , thay  vào ta được  (đúng)

Vậy ba điểm  thẳng hàng.

**Bài 2:**

Cho hàm số  có đồ thị là đường thẳng 

a) Tìm điểm cố định mà đường thẳng luôn đi qua với mọi 

b) Tìm  để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến d là lớn nhất.

**Lời giải**

a) Gọi  là điểm cố định của hàm số



b) Gọi  là hình chiếu của  lên . Ta có  (không đổi)

 lớn nhất  khi 

Phương trình  có dạng 

Vì 

Vậy phương trình  là 

Để đường thẳng d vuông góc với đường thẳng OM thì 

Vậy với  thì khoảng cách gốc tọa độ là đường thẳng d.